Zum Mathematikunterricht an einer Waldorfschule

2. Teil: Der Weg durch die Oberstufe

Im vorigen Heft wurde beschrieben, wie etwa von der 7. bis zur 9. Klasse, also während des Übergangs zur Oberstufe, ein Ablösungsprozess stattfindet: vom *Bild* zum *Urteil,* von der *Kenntnis* zur *Erkenntnis* und vom *Autoritätsgefühl* zum *Sach*- oder *Welt-Interesse.* In Heilbronn beginnt die Oberstufe in der Regel mit der 9. Klasse. In dieser Klassenstufe (mit vielen neuen Lehrern) wird der beschriebene Ablösungsprozess weitergeführt und intensiviert, und mit der 10. Klasse sind die SchülerInnen in der Oberstufe „angekommen". Jetzt werden sie mit „Sie" (und Vornamen) angesprochen, und häufig fällt ihnen auf, dass es „irgendwie anders" geworden ist.

Im Folgenden soll *die sich entwickelnde Urteilskraft* eines Schülers oder einer Schülerin der Oberstufe betrachtet werden und gezeigt werden, in welcher Weise sie im Mathematikunterricht unterstützt und gefördert werden kann.

In der ersten Epoche der *9. Klasse* werden kombinatorische Fragen behandelt, also Fragen nach den Anordnungs- und Auswahlmöghchkeiten von Dingen. Dafür muss ein/e Schüler/in zählen und denken können, die Epoche ist ansonsten mathematisch fast voraussetzungsfrei und – direkt nach der Klassenlehrerzeit – ideal als Einstieg in die Oberstufe geeignet. Eine einfache Fragestellung aus dieser Epoche soll die Entwicklung *der praktischen Urteilskraft* in der 9. Klasse charakterisieren:

Wie viele Möglichkeiten haben drei Schüler (Paul, Anna, Eva), sich zu setzen?

Dies wird zunächst praktisch gelöst durch Aufschreiben aller Möglichkeiten (oder sogar durch reales Ausprobieren):

Paul, Anna, Eva
Anna, Eva, Paul
Eva, Anna, Paul
Paul, Eva, Anna
Anna, Paul, Eva
Eva, Paul, Anna.

Das sind alle, also 6 Möglichkeiten. Wir können abkürzen:

P, A, E
A, E, P
E, A, P
P, E, A
A, P, E
E, P, A

Wir können noch systematisch (alphabetisch) anordnen:

A E, P
A, P, E
E, A, P
E, P, A
P, A, E
P, E, A

Wir können anstelle von Buchstaben Zahlen verwenden (geschickt für weitere Beispiele wie Michael, Franz, Kunigunde oder roter, grüner, blauer Ball, weil es gar nicht darauf ankommt, was angeordnet wird):

1,2,3
1,3,2
2,1,3
2,3,1
3,1,2
3,2,1

Es sind immer noch 6 Möglichkeiten… Wir haben ganz praktisch begonnen und bewältigen aus praktischen(!) Gründen erste Abstraktionsstufen. Wie ist es bei vier Schülern? Wir schreiben systematisch alle Möglichkeiten auf:

1,2,3,4	2,1,3,4	3,1,2,4	4,1,2,3
1,2,4,3	2,1,4,3	3,1,4,2	4,1,3,2
1,3,2,4	2,3,1,4	3,2,1,4	4,2,1,3
1,3,4,2	2,3,4,1	3,2,4,1	4,2,3.1
1,4,2,3	2.4,1,3	3,4,1,2	4,3,1,2
1,4,3,2	2,4,3,1	3,4,2,1	4,3,2,1

Es sind 24 Möglichkeiten. Warum gerade 24?

Die Systematik der Anordnung erleichtert das Denken: legt man den ersten Schüler fest, gibt es noch drei Schüler, die ihre Plätze tauschen können. Drei Schüler, also 6 Möglichkeiten. Vier Schüler können jeweils an erster Stelle sein, also insgesamt 4 mal 6 = 24 Möglichkeiten. Wir entdecken auf diese Weise sogar eine Formel für n Schüler; für 14 Schüler gibt es über 80 Milliarden Möglichkeiten – und wir verstehen, wie das zustande kommt! Die mögliche Einsicht, dass Ordnung und eine gewisse Systematik auch positive Seiten haben, ist in diesem Alter durchaus wünschenswert. Nur zum Vergleich: die Endstufe der Abstraktion wäre: die Anzahl P(n) der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist n! (n Fakultät).

Die zweite Epoche der 9. Klasse ist eine Geometrie-Epoche, ihr Schwerpunkt: die „Kegelschnitte“ (Parabel, Hyperbel, Ellipse). Sie liegt in der Entwicklung des Jugendlichen genau an der richtigen Stelle: in dieser Zeit formt sich das Knochensystem aus (besser: der Jugendliche formt sein Knochensystem aus!). Was hat dies mit den Kegelschnitten zu tun? Nun, die menschlichen Röhrenknochen z.B. haben eine hyperbolische Form, die Rippen sind parabelförmig – der Idee nach, nicht pedantisch genau.

Das höchste Leben ist Mathematik.
Novalis

Zu der praktischen Urteilskraft tritt in der 10. Klasse die Ausbildung der theoretischen Urteilskraft hinzu. Damit ist gemeint, dass sich der Denkprozess zeitweise völlig von der Beobachtung abwendet und Zusammenhänge rein denkend erforscht. Die SchülerInnen entdecken, dass etwas, was sie rein in sich erdenken, alle möglichen Fälle der Erfahrung in der äußeren Welt beschreibt und bestimmt. Das weckt Staunen und begründet Vertrauen in die theoretische Urteilskraft.

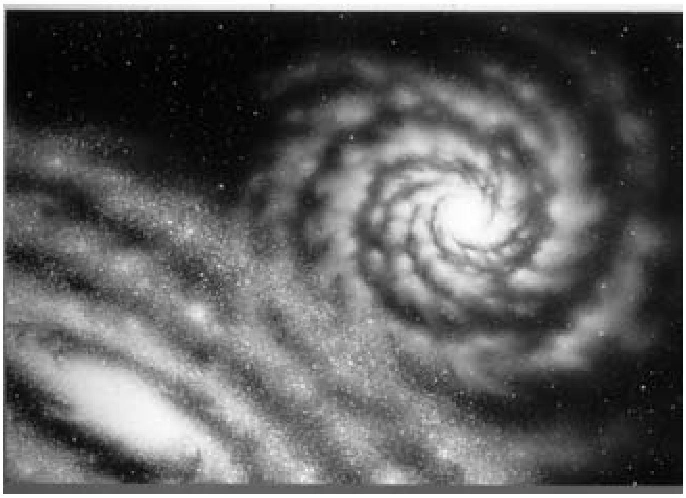
Eine Epoche der 10. Klasse schließt die Arithmetik mit der Behandlung der höheren Rechenarten ab. Wurzelziehen (Radizieren), Potenzieren und Logarithmieren in Zusammenhang mit den vier Grundrechenarten werden erforscht und geübt. Was gibt es davon draußen in der Welt? Nur ein Beispiel: die aufgeschnittene Schale eines tintenfischverwandten Kopffüßlers aus dem Südpazifik (das Perlboot, Nautilus pompilius) ist eine logarithmische Spirale; ebenso – etwas größer – ein Spiralnebel wie unsere Milchstraße oder die Luftströmung um ein Tiefdruckgebiet. Das weckt Staunen und schafft auch eine Spannung zwischen eigenem Denken und wahrgenommener Welt.

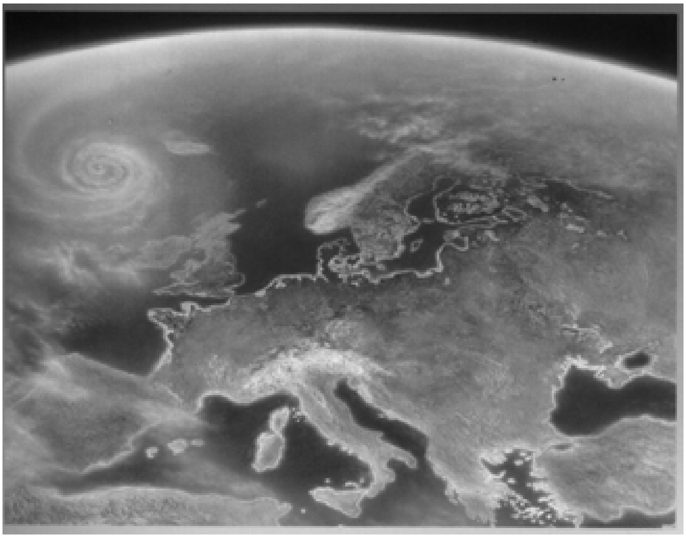
Man muss ihnen begreiflich machen, dass es etwas ist, wovor ein Novalis auf den Knien liegen würde.
R. Steiner

Die theoretische Urteilskraft im reinen Denken bedarf einer starken Verankerung in der Welt. Diese wird begründet im praktischen Tätigsein als eine Art Gegengewicht zum Denken. Die Trigonometrie-Epoche in der 10. Klasse behandelt die Beziehungen zwischen Strecken und Winkeln in Dreiecken rechnerisch, d.h. theoretisch. Jedes Vieleck lässt sich in lauter Dreiecke unterteilen, insofern ist der vollständige Überblick über Dreiecke ein erstrebenswertes Ziel. Die SchülerInnen erarbeiten sich einen solchen Überblick und „beherrschen“ das Thema. Nun ergänzt das Vermessungspraktikum die Epoche in dem oben beschriebenen Sinne in idealer Weise. Hier wird, wenn möglich, nur ge-

Wie ist es möglich, dass die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht?
A.Einstein

messen; die auftretenden Dreiecke innerhalb des Polygonnetzes werden nur zur Kontrolle einer Rechnung unterzogen. Welche Befriedigung, wenn die gemessenen Werte mit den errechneten Größen übereinstimmen! Wenn nicht, bedarf es keiner Aufforderung, eine zweite Messung durchzuführen – die Sachlage zwingt dazu.





Ende der 10. Klasse haben die SchülerInnen die klassische Mathematik abgeschlossen, kulturgeschichtlich befinden sie sich in der Zeit der ersten Logarithmentafeln und der Verbesserung der großen Land- und Seekarten: Handelswege und Reiserouten konnten zuverlässiger geplant werden, die Welt rückte näher.

Eine neue Zeit bricht an. Die Urteilskraft der SchülerInnen wird individueller, in der 11. Klasse beseelter, in der 12. Klasse sachlicher. Eine Epoche der 11. Klasse (Analytische Geometrie) handelt von der Entdeckung René Descartes‘, dass die beiden scheinbar völlig getrennten Gebiete der Algebra und der Geometrie miteinander zu tun haben: zu einer bestimmten Gleichung gehört eine bestimmte geometrische Kurve und umgekehrt. Man kann Fragen aus einem Gebiet in das jeweils andere „übersetzen“ und dort nach Antworten suchen: es gibt große Zusammenhänge.

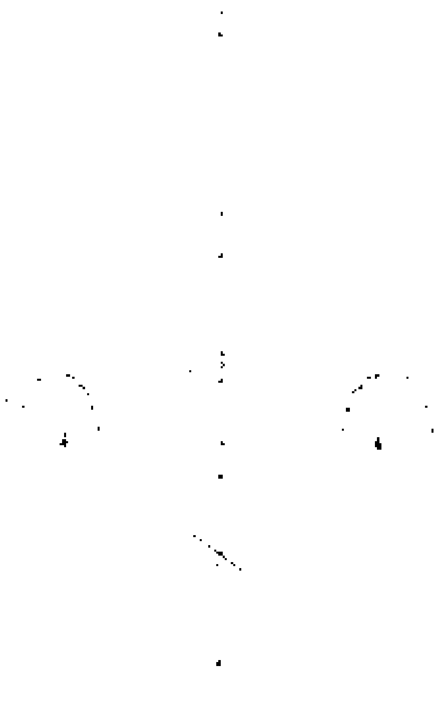
Die zentrale Frage in den letzten beiden Klassen der Waldorfschule ist jedoch die nach dem Unendlichen, in der Epoche über Projektive Geometrie in der 11. Klasse rein geometrisch nach dem unendlich Fernen. Eine kleine Übung dazu: stellen Sie sich zwei Geraden drehbar in je einem Punkt aufgehängt vor (wie zwei unendlich lange Bahnschranken).Nun werden die beiden Geraden gleichzeitig nach oben gedreht. Der sichtbare

Denn weder gibt es beim Kleinen ja ein Kleinstes, sondern stets ein noch Kleineres — aber auch beim Großen gibt es immer ein Größeres.

Anaxagoras
(ca. 500 - 428 v. Chr.)

Schnittpunkt S wandert auf der Mittelsenkrechten nach oben, immer weiter, je mehr gedreht wird (siehe Zeichnung). Bald passt er nicht mehr auf das Zeichenpapier. Es gibt ihn noch, natürlich, wir können ihn uns vorstellen. Er wandert immer weiter nach oben, je mehr gedreht wird, auch wenn der Drehwinkel schon fast 90° groß ist.

Nun ist der Drehwinkel in einem Moment genau 90°, die beiden Geraden sind genau parallel. Wohin ist der Schnittpunkt S gewandert? Ist er weg? Wie ist er verschwunden? Hat die Bahn der Mittelsenkrechten ein Loch? Die Drehung der beiden Geraden hatte kein Loch! Drehen Sie weiter nach außen, was passiert? Wo befindet sich jetzt der Schnittpunkt S? – Der gemeinsame Punkt der beiden parallelen Geraden – gibt es ihn überhaupt, oder sind es vielleicht sogar zwei? – ist jedenfalls nicht mehr vorstellbar. Die Anstrengungen in der Epoche über Projektive Geometrie konzentrieren sich nun darauf, ob dieser Punkt denkbar ist, was das bedeutet und welche Konsequenzen dies hat. Ein berühmter Zeitgenosse Rudolf Steiners meinte Folgendes dazu:



DIE ZWEI PARALLELEN

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da war‘s dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War‘n sie noch Parallelen?
Sie wußtens selber nicht,
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie,
als wie zwei Seraphim.

Christian Morgenstern

In der 12. Klasse dreht sich alles um die zahlenmäßige Behandlung des unendlich Kleinen und des unendlich Großen (Infinitesimalrechnung). Teilgebiete sind die bekannte Differenzial- und Integralrechnung. Während diese Themen Allgemeingut an vielen weiterführenden Schulen geworden sind, ist die Projektive Geometrie ein waldorfspezifisches Unterrichtsgebiet geblieben. Dies ist keine Nebensächlichkeit, sondern ein Symptom – wofür? Der französische Denker Paul Valery formulierte es pointiert so: „Descartes ist mit Sicherheit einer der Männer, die die Verantwortung für den modernen Lebensstil, der alles quantitativ beurteilen möchte, tragen. Als die Figur durch Ziffern ersetzt wurde, als alle Erkenntnisse dem Vergleich zwischen Größen unterworfen wurden, wodurch eine Erniedrigung erfolgte von allem, was in arithmetischen Relationen nicht ausgedrückt werden konnte, geschah etwas, was die allergrößte Bedeutung auf allen Gebieten gehabt hat. Auf die eine Seite wird alles Messbare hinorientiert, auf die andere Seite alles, was nicht gemessen werden kann.“ – Es wäre eine Übertreibung, Descartes zum Sündenbock für die Einseitigkeiten unserer Kultur zu machen. Es ist jedoch offensichtlich, dass Valerys Worte begründet sind.

Selbstverständlich spielen in den obersten Klassen auch Prüfungserfordernisse eine wichtige Rolle. Dennoch hat in der Waldorfschule die gesamte individuelle Entwicklung des Jugendlichen die oberste Priorität: „im Mittelpunkt der Mensch“. In welcher Weise dabei auch im Mathematikunterricht eine andere wissenschaftliche Richtung eingeschlagen und gepflegt werden kann, soll Gegenstand eines späteren Beitrages sein.

A. Miltner (L)

Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.

D.Hilbert (1862 -1943)